



TITLE:

チャネル乱流の大規模構造に対応  
する解とその乱流における役割 (流  
れの遷移と乱流のスケルトン)

AUTHOR(S):

藤, 定義; 板野, 智昭

---

CITATION:

藤, 定義 ...[et al]. チャネル乱流の大規模構造に対応する解とその乱流に  
おける役割 (流れの遷移と乱流のスケルトン). 数理解析研究所講究録  
2005, 1454: 187-195

ISSUE DATE:

2005-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/47801>

RIGHT:

# チャネル乱流の大規模構造に対応する解とその乱流における役割

藤 定義 (京大院理)、板野智昭 (関大工)

発達したチャネル乱流では、壁近傍での乱れ生成を支配する壁近傍構造と共に、外層においても、低速ストリークと類似した流れ構造を持つ大規模構造と呼ばれる秩序構造が存在する。本報告では、乱流と層流を分けるセパトリックス上に存在する定常進行波解を、シューティング法を用いて  $Re = 12000$  まで求めた。求まった解は、外層のスケールに従い、大規模構造に対応する解であると考えられる。セパトリックス上の安定軌道を追跡し、大規模構造の乱流化過程が、壁近傍層とは無関係に大規模構造の不安定化を経ること示す結果を得た。この結果は、大規模構造を維持するダイナミクスが、壁近傍構造の維持機構とは独立であることを示唆するものである。

## 1 はじめに

壁を持つ乱流の乱れ生成機構は、低レイノルズ数かつミニマル領域 [10] に制限すると、周期解や定常進行波を用いて理解できることが明らかになってきた [16, 6, 8, 11, 14]。更に、壁近傍層に観測される秩序構造は、多くの実験や直接数値シミュレーション (DNS) によってレイノルズ数やシステムサイズに依存しない普遍性を持つことが知られている。以上のことから、乱れ生成機構は、壁近傍層に局在した構造の普遍的なダイナミックに基づくものであると考えられている。

一方、チャネルの外層 (内部) は、壁近傍層で作られた乱れにより維持される受動的な存在であると考えられてきた。しかしながら、壁近傍構造である低速ストリークに類似な流れ方向に低速な領域から成る外層の縞状の構造が存在することが古くから可視化により [2]、また最近では大規模な DNS から統計的に示されている [3, 5]。この構造は、外層の尺度でスケールできるため、大規模構造と呼ばれている。

本報告では、壁近傍層の場合と同様に、この大規模構造を特徴付ける厳密解が存在することを DNS を用いて示す。

### 1.1 厳密解の性質

Waleffe は、クエット流に対して定常 (進行波) 解を求め [17, 18]、この解が低レイノルズ数でサドル・ノード分岐により発生し、二つの解が壁近くに局在する傾向のある分枝 (不安定ノード、上分枝解) とチャネル全体に広がる傾向のある分枝 (サドル解、下分枝解) に分かれることを示した [19]。低レイノルズ数では、外層が発達していないので大規模構造と下分枝解との関連は明らかではない。しかしながら、DNS では大規模構造が比較的低レイノルズ数でも観測されることから、大規模構造が低レイノルズ数に起源を持つことから下分枝解と関連していることが示唆される。

### 1.2 大規模構造

壁乱流中に観測される秩序構造は多様である [13, 1]。特に高レイノルズ数では、広範囲に渡るスケールの現象が励起されるために構造を同定することは難しい [4]。DNS では、微細な渦構造を可視化すると構造の粗視的な様相が捉えられにくい。一方、流れ方向の速度を用い

ると、細かい構造はあるものの粗視的な構造が卓越している。いずれにせよ、揺らぎが大きい大規模構造の同定には統計的処理が行われる。最近では、Jiménez が用いた [9]、流れ方向やスパン方向のエネルギースペクトルの持つピーク値に対する壁からの距離依存性を調べる手法が標準的に用いられている。この結果、壁近傍層では低速ストリークに対応する 100 壁長さ単位程度の構造が卓越する一方で、外層では外層の長さスケールであるチャンネルの半幅  $\delta$  でスケールされ、およそ  $1.2 \sim 2\delta$  程度の構造が卓越することが示された [3, 5]。この外層の尺度でスケールされる構造を大規模構造と呼んでいる。

## 2 計算手法

### 2.1 流れ方向ミニマル領域を用いた直接シミュレーション

本報告では、外層の尺度でスケールされる解を直接シミュレーションを用いて数値的に求める。大規模構造に対応する解を求めるために、スパン方向は大規模構造の特徴的なスパン方向長さである  $1.3\delta$  に、また流れ方向はミニマル長さ程度の  $\pi$  にそれぞれ固定して、レイノルズ数は 4000、6000、8000、12000 の 4 つの値を用いる。以下、 $\delta = 1$  とする。

DNS の手法は、流れ方向とスパン方向にはフーリエ級数展開、壁に垂直方向にはチェビシェフ多項式展開を行いエイリアス誤差を取り除いた擬スペクトルを用いていた。移流項の時間発展には、2 次精度の Adams-Bashforth 法を、粘性項には Crank-Nicolson 法をそれぞれ用いた [12, 8]。全てのレイノルズ数に対して、モード数  $N_x \times N_y \times N_z = 32 \times 65 \times 32$ 、計算領域  $L_x \times L_z = \pi \times 1.3\delta$  を用いた。時間刻み  $dt$  は、 $Re = 12000$  で 0.002 を用いた以外は 0.01 とおいた。

### 2.2 シューティング法

我々は、これまでミニマル領域<sup>1</sup>のポアズイコ流に対して、乱流と層流を分けるセパトリックス上に存在する定常進行波解と周期解を求めた [8, 14]。

解をセパトリックス上では安定な解に漸近させるために、以下のように初期値を 2 次元成分と 3 次元成分に分け、3 次元成分の振幅を調整パラメーター  $F_{ac}$  として乱流にも層流にも漸近しないように決める。この手法をシューティング法と呼ぶ。

$$\mathbf{u}_{int} = \mathbf{u}^{2D}(y, z, t) + F_{ac}\mathbf{u}^{3D}(x, y, z, t), \quad (1)$$

$$\mathbf{u}^{2D}(y, z, t) = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} \mathbf{u}(x, y, z, t) dx, \quad \mathbf{u}^{3D}(x, t) = \mathbf{u}(x, t) - \mathbf{u}^{2D}(y, z, t). \quad (2)$$

シューティング法は、セパトリックスを過る方向に不安定な固有値を唯一つ持つ、双曲的不安定な解を求める場合にのみ有効である。また、解を 2 次元と 3 次元成分に分離するのは、乱れ生成機構において 2 次元的な低速ストリークに漸近した後に、流れ方向の 3 次元攪乱に対して不安定化するフェーズが存在することを利用している [6, 14]。初期条件には低速ストリークの種となる 1 対の流れ方向渦を壁付近に持つ流れを用いている。

これまでの解は、レイノルズ数が 3000 以下、あるいは  $Re_\tau$  が 130 以下の外層が十分発達していない流れで得た。以下では、大規模構造との関係を調べるために最大で 12000 までのレイノルズ数に対して求めることを試みた。

<sup>1</sup> $Re = 3000$  の場合、 $L_x = \pi$ ,  $L_z = 1.3\delta$  がミニマル領域に近い。レイノルズ数が大きくなるにつれて壁単位長さは小さくなるが、外層の尺度は  $\delta$  のままなので、計算領域を固定しておくことができることに注意して欲しい。

### 3 計算結果

シューティング法を用いて定常進行波解を求めた結果を報告する。実はここで報告する定常進行波は、セパトリックス上でも不安定なサドルになっている。従って、少なくとも2つの不安定固有値を持つので、原理的にシューティング法では求めることができない。しかしながら、初期条件が定常進行波解の安定多様体に近いために、 $F_{ac}$ を調整することで解を定常進行波解にある程度接近させることができる。以下で紹介する定常進行波解は、この意味で厳密解ではない。また、この近似解を得る場合を、局所シューティング法と呼ぶことにする。

#### 3.1 定常進行波解

局所シューティング法によって得た定常進行波解に対し、解の精度を見るために、パラメータ  $F_{ac}$  の上限と下限を表2に示した。ほぼ5桁の精度があることが分かる。ただし、これ以上精度を上げて、真の解に収束するわけではない。

図1に、レイノルズ数4000、8000、12000の場合の流れ方向速度と渦度の2次元成分  $u_x^{2D}$  と  $\omega_x^{2D}$  の等値線図を示した。図から分かるように、レイノルズ数が高くなっても、解はほぼ同じような構造を持つ。このことから、これらの解は、外層の尺度でスケールされることが推測できる。

レイノルズ数	4000	6000	8000	12000
$F_{ac}$ の上限値	0.266630305	$1.241 \times 10^{-3}$	$4.02318 \times 10^{-7}$	$7.9095 \times 10^{-7}$
$F_{ac}$ の下限値	0.266630303	$1.240 \times 10^{-3}$	$4.02315 \times 10^{-7}$	$7.9093 \times 10^{-7}$

表1: 局所シューティング法で得た定常進行波解の精度を示すために、それぞれの解の  $F_{ac}$  の上限値と下限値をまとめた。

#### 3.2 Waleffe の理論

円管ポアズイユ流の乱流遷移の問題は、層流解が全てのレイノルズ数において線形安定であるため、非線形安定性を扱う必要がある。従って、安定性は攪乱の空間構造に強く依存するが、振幅に関してはほぼレイノルズ数 ( $Re$ ) に逆比例することが報告されている [7]。位相空間で見ると、層流解の吸引域の平均半径が  $Re^{-1}$  で小さくなることを意味する。

Waleffe は、基準となる非線形攪乱として乱流解と層流解のセパトリックス上にあると考えられる下分枝解を用いて、 $Re^{-1}$  の依存性を導き出す理論を提案した。ただし、定常進行波解がセパトリックス上にあることは保証されていない。

Waleffe の理論では、自己維持過程 (Self-Sustaining Process : SSP [16, 6]) に基づく以下の単純な  $Re$  逆冪展開を用いている。ただし、 $c$  は定常進行波解の位相速度、 $L_x$  は攪乱の流れ方向の波長である。

$$u = U(y) + u_0(y, z) + Re^{-1}u_1(y, z)e^{i\vartheta} + Re^{-2}u_2(y, z)e^{2i\vartheta} + \dots + \text{c.c.}, \quad (3)$$

$$v = Re^{-1}v_0(y, z) + Re^{-1}u_1(y, z)e^{i\vartheta} + Re^{-2}v_2(y, z)e^{2i\vartheta} + \dots + \text{c.c.}, \quad (4)$$

$$w = Re^{-1}w_0(y, z) + Re^{-1}w_1(y, z)e^{i\vartheta} + Re^{-2}w_2(y, z)e^{2i\vartheta} + \dots + \text{c.c.}, \quad (5)$$

$$\vartheta = 2\pi(x - ct)/L_x.$$

SSP では、2次元成分の  $U(y) + u_0(y, z)$  をストリーク、 $(v(y, z), w(y, z))$  を縦渦成分、また波数  $k$  の攪乱をストリークの3次元攪乱とそれぞれ見做す。縦渦成分が  $Re^{-1}$  のオーダーであ

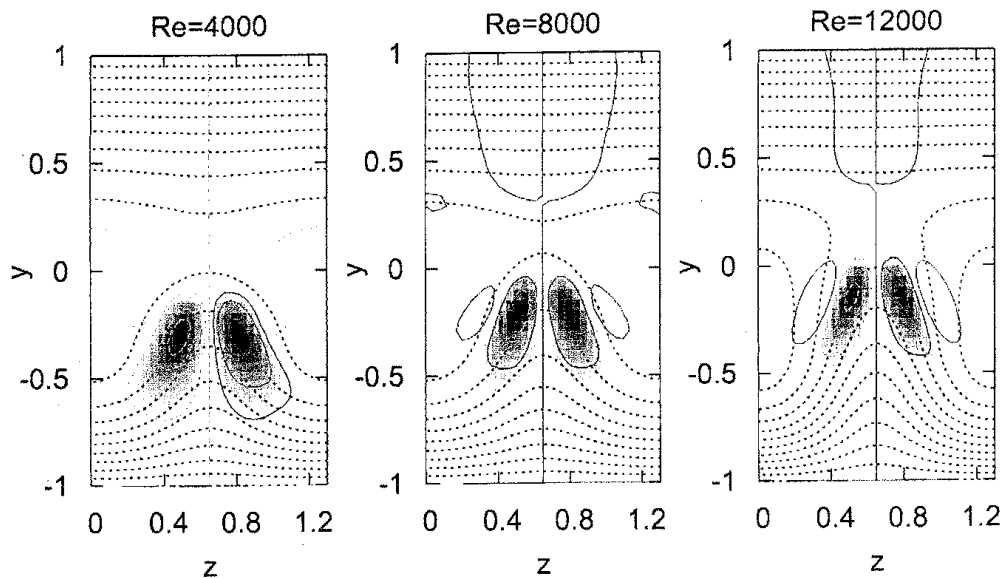


図 1: レイノルズ数 4000、8000、12000 に対する、 $u_x^{2D}$  の等値線と  $\omega_x^{2D}$  の等値線。壁近傍構造に見られる低速ストリークと縦渦構造によく似た構造が見られる。壁近傍では、ほぼ層流状態になっている。

るのは、 $(0, v_0, w_0) \cdot \nabla u_0 = \frac{1}{Re} \Delta u_0$  から導かれる。この展開は、あくまで SSP に基づく形式展開であり、摂動解の存在を保証するものではないことに注意して欲しい。この展開が境界層などを考慮しない空間一様な展開であるから、下分枝解がこの展開に従う漸近的な振舞をするならば、外層に尺度に従うことが推測できる。

前節で紹介した局所シューティング法で得た定常進行波解が Waleffe の展開に従うレイノルズ数依存性を持つかどうか確認するために、各速度成分を  $Re$  の関数として図 2 に示す。左図と中央図から明らかなように、展開の 1 次の項まではほぼ展開に従っている。一方、右図からは 2 次の項はむしろ  $Re^{-1}$  のオーダーであることが分かる。高次の項の精度は十分とは言えないが、少なくとも 1 次までは正しいと考えられるであろう。

この結果は、我々の求めた定常進行波解は、レイノルズ数と共に (1) 速度の流れ方向成分 (低速ストリーク) が卓越し、(2) 流れ方向に一様になる 2 次元化が起きる、ことを示唆する。Jiménez ら [5] が行った大規模、高レイノルズ数の DNS の結果は、流れ方向のエネルギーピークが長波長側にあり、極限として無限大になると予想している。従って、我々と Jiménez らの結果は整合的である。

2 次の項が展開からずれているが、これは定常進行波解が SSP に基づかない維持機構を含むことを意味しているので、純粋に外層の尺度でスケールされるのではないことを示唆していると考えられる。すなわち、全く無視した壁近傍層の影響が僅かながらも効いていると推測される。いずれにせよ、解の精度は高次の項を評価できる程高くないと思われるので、結論を出すには精度を高める必要がある。

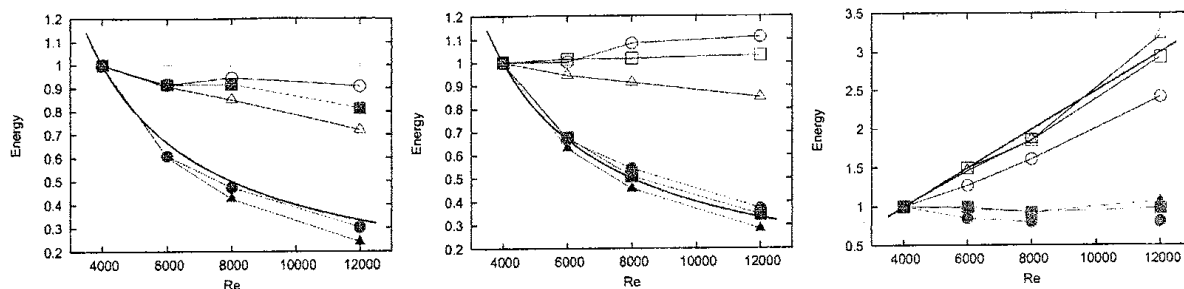


図 2: 局所シューティング法で求めた定常進行波解に対する Waleffe の摂動展開各項のレイノルズ数依存性. いずれも,  $Re = 4000$  で 1 になるように規格化している. (左図)  $*$ :  $U$ ,  $\blacksquare$ :  $u_0$ ,  $\bullet$ :  $v_0$ ,  $\blacktriangle$ :  $w_0$ ,  $\square$ :  $u_0 Re$ ,  $\circ$ :  $v_0 Re$ ,  $\triangle$ :  $w_0 Re$ ,  $-$ :  $1/Re$ . (中央図)  $\blacksquare$ :  $u_1$ ,  $\bullet$ :  $v_1$ ,  $\blacktriangle$ :  $w_1$ ,  $\square$ :  $u_1 Re$ ,  $\circ$ :  $v_1 Re$ ,  $\triangle$ :  $w_1 Re$ ,  $-$ :  $1/Re$ . (右図)  $\blacksquare$ :  $u_2 Re$ ,  $\bullet$ :  $v_2 Re$ ,  $\blacktriangle$ :  $w_2 Re$ ,  $\square$ :  $u_2 Re^2$ ,  $\circ$ :  $v_2 Re^2$ ,  $\triangle$ :  $w_2 Re^2$ ,  $-$ :  $Re$ .

### 3.3 大域的シューティング法

前節では, セパトリックス上の双曲的不安定定である定常進行波解を求めた局所シューティング法の結果を示した. シューティング法は本来, セパトリックス上のアトラクターを求める手法である. 前節で用いた局所シューティング法と区別するために, 以下大域的シューティング法と呼ぶことにする.

本節では, アトラクターに漸近する軌道を追跡した結果<sup>2</sup>について報告する. しかしまだ閉じた軌道を得ていないので, 途中経過でしかないことに注意して欲しい. ただし, 乱流化するときに通過する不安定多様体上での解の振舞は, 不安定化が低速ストリーク成分の不安定化によるもので壁近傍層の乱れ生成とは独立に起きることを示唆する. つまり, 外層が壁近傍層から独立した自励機構を持つことが期待できる.

図 3 に, 現在得られているもっとも精度の高い大域的シューティングの結果を示す. この図では, 壁に垂直方向速度の 2 次元成分の持つエネルギー  $E_v^{2D}$  と 3 次元成分の持つエネルギー  $E_v^{3D}$  から張られる位相空間へ軌道を射影した. 前節で得た定常進行波解は, 右図の  $(1 \times 10^{-7}, 1 \times 10^{-7})$  付近にあるループの近くにある. しかしながら, それぞれ 5 桁以上の精度があるにも関わらず,  $F_{ac}$  の値は 1 桁しか一致しないことに注意して欲しい. 右図から分かるように, 軌道は時折急に向きを変えるが, その周囲には双曲的不安定定がある場合が多い. 先程紹介したループも, 双曲的不安定定である定常進行波解へ接近した痕跡である.

図 4 に解構造の変化の一例を示す. 初期は, 図 1 に示すようにチャンネルの片側に局在した低速ストリークの構造を持っているが,  $(1 \times 10^{-11}, 1 \times 10^{-8})$  付近の双曲的不安定定を通過する前後で上側に縦渦が発生し (図 4(a)), 更に  $(1 \times 10^{-8}, 2 \times 10^{-9})$  付近の双曲的不安定定を通過する前後で上側の縦渦が卓越している (図 4(c)). これらの結果は, アトラクター上の解も外層の尺度でスケールされる大規模構造の性質を持つこと, またチャンネル中央に局在し壁近傍層とは空間的に分離した状態にあることを示している.

図 5 には, アトラクターの不安定多様体 (の近く) に沿って乱流化する軌道の解構造を示した. 図 5(a), (b) が示すように, 解はチャンネル中央に対してポアズイユ流の持つ対称性を持つ構造に移ったことが分かる. 更に, 図 5(c) から, 乱流化はチャンネル中央の構造が不安定化に起因することが読み取れる.

<sup>2</sup>数値計算で追跡できるのは漸近する軌道であり, アトラクターそのものではない.

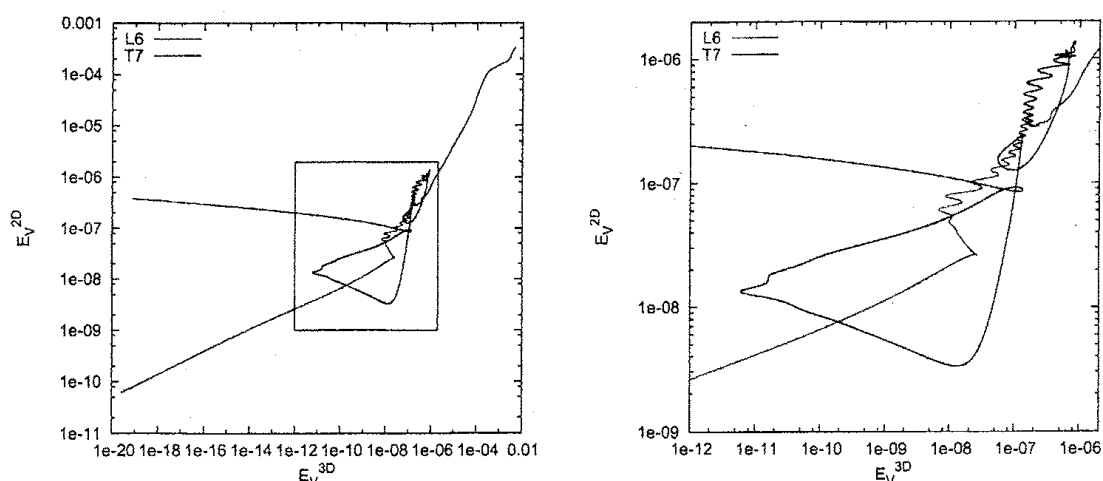


図 3: 大域的シューティング法で求めた軌道の  $(E_v^{2D}, E_v^{3D})$  で張られる位相空間への射影. 層流化した  $F_{ac} = 7.067766 \times 10^{-7}$  と乱流化した  $F_{ac} = 7.067771 \times 10^{-7}$  の 2 本の軌道を示す. (左図) 左中央を初期値とする 2 本の軌道. (右図) 左図中央部分の拡大図.

以上まとめると, (1) セパトリックス上アトラクターは外層の尺度でスケールできる大規模構造としての性質を持つ, (2) 軌道はセパトリックス上の双曲的不安定点を経る, (3) 解はチャンネル中央に局在し, 壁近傍層とは空間的に独立している, (4) 乱流化はチャンネル中央の構造の不安定化に起因し, 壁近傍層の不安定化によるものではない, という結果を得た.

## 4 結論

本報告では, 流れ方向ミニマル領域を用いた DNS を行い, シューティング法を用いて比較的レイノルズ数の高い値に対して, 乱流と層流を分けるセパトリックス上の定常進行波解及びアトラクターに漸近する軌道を求めた. 層流解が不安定化するレイノルズ数の値を扱ったが, 流れ方向ミニマル領域では, 流れ方向の周期が不安定攪乱の波長以下であるので, 層流解は常に線形安定となっている.

局所的シューティングの精度内で得た定常周期解は, 外層の尺度でスケールされる. また, その空間構造は, 低速ストリークとその周囲の千鳥った縦渦からなる壁近傍層の秩序構造によく似ており, 大規模構造に対応すると考えられる.

Waleffe の下分枝解に対する, SSP に基づくレイノルズ数の逆冪展開を定常進行波解が少なくとも 1 次の項まで満たすことを示した. この展開は形式展開であり, 下分枝解が直接求まるわけではない. しかし, 高レイノルズ数に対する展開であるにも関わらず, 空間変数に関しては境界層近似など一切用いない一様性を仮定していることから, 大規模構造に対応するものと考えられる. また, 流れ方向速度成分の 0 次項 (2 次元成分) を除き, レイノルズ数の逆冪で減少することから, 高レイノルズ数では, 流れ方向に一様な 2 次元的な低速のストリークの卓越する構造が観測できることが予想される. この予想が最近の Jiménez らの結果と整合的であることは, 展開の正しさを支持するものである. 我々の定常進行波解が Waleffe の展開に従うことは, セパトリック上に大規模構造に対応する下分枝解が存在することを間接的に示すものであろう.

我々の定常進行波解の精度は高くはないが, 2 次の項は明らかに展開とずれている. このこ

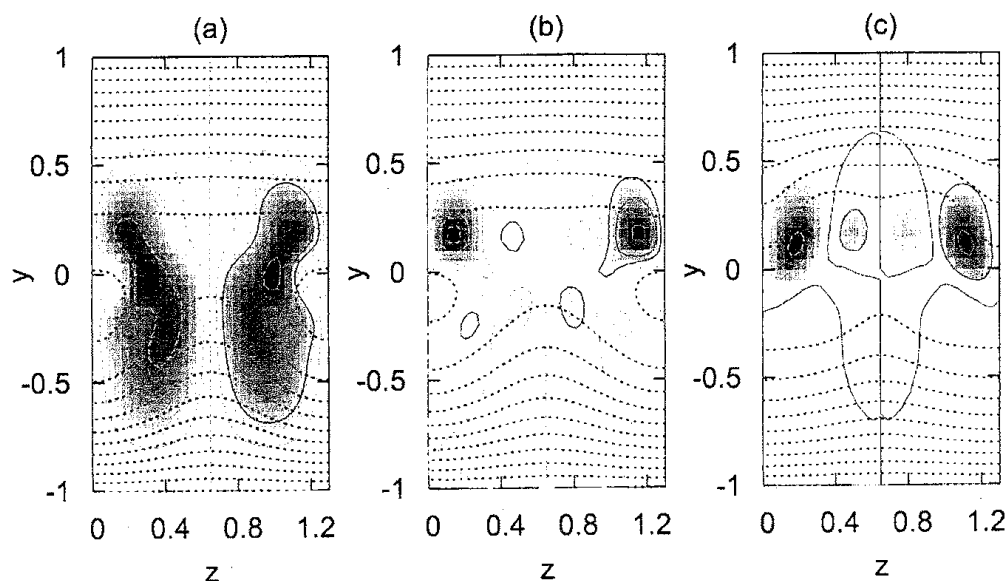


図 4:  $u_x^{2D}$  の等値線と  $\omega_x^{2D}$  の等値線.  $(1 \times 10^{-8}, 2 \times 10^{-9})$  付近のカーブを曲がる前後での解構造の変化.

とは、壁近傍層を考慮にいれていないことが原因の一つであると考えられる。しかしながら、1次までは良い近似となっていることから、外層の定常進行波解と壁近傍層は比較的独立であると考えられる。

大域的シューティングにより、セパトリックス上のアトラクターに漸近する解軌道を追跡した。精度がまだ十分でないために、アトラクター本体の同定には至っていない。解軌道は、複数の双曲的不安定点を経めぐりながら、解の空間構造を変える。本報告で紹介した軌道は、チャンネルの下側に局在した定常進行波解から上側に縦渦が移動し、更にポアズイユ流の対称性を満たす構造に移った後に、チャンネル内部が不安定化して乱流に遷移する。以上の結果は、セパトリックス上のアトラクターの吸引域は大規模構造の特性を持っていること、外層は壁近傍層とは独立した自励機構を持つことを示唆するものである。

以上、セパトリックス上の大規模構造に対応すると思われる解の性質をDNSを用いて調べて来た。この解が、実際の乱流中に観測される大規模構造と直接関係するかどうかは、現時点では不明である。位相空間において、実際の乱流に対応するのは吸引域内部の乱流アトラクターであるが、アトラクター上の軌道が吸引域の境界であるセパトリックスに接近しない限り実際の乱流に反映されない。本報告で得たセパトリックス上の解が、実際の乱流と関連がある可能性として二つの場合が考えられる。1つは、吸引域境界が非常に複雑な構造をしており内部のアトラクターに接近している場合である。もう一つは、実際の状況では層流解は不安定でありセパトリックスが乱流アトラクターの内部に取り込まれている場合である。いずれせよ推測の域をでない根拠の無いものである。

本報告の解が実際の大規模構造と関連があるとする、これまでの結果から壁近傍層の乱れ生成機構と外部層の大規模構造の維持機構が独立性の高いものであると期待できる。これ



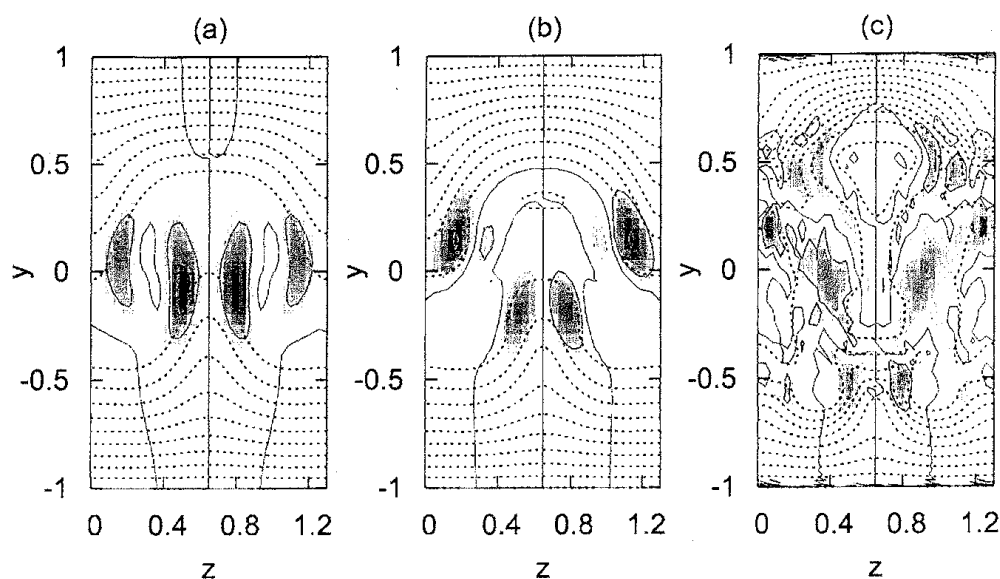


図 5:  $u_x^{2D}$  の等値線と  $\omega_x^{2D}$  の等値線. 乱流化する時の不安定多様体沿っての変化.

は、壁近傍層を近似するスケルトン(骨格)と外層の骨格が弱く結合した系としてチャンネル乱流が捉えられることを予想させる。

以上、チャンネル乱流を記述する基礎となると考えられる解について考察した。本小論で報告した数値計算の結果は、この考察を裏付けるにはまだまだ不十分なものである。今後の詳細な研究に期待したい。

## 参考文献

- [1] 三宅裕:壁乱流の渦, ながれ **22** (2003) 24-34.
- [2] 種子田定俊:画像から学ぶ流体力学. 朝倉書店(1988) 152-154.
- [3] ABE, H., KAWAMURA, H. & MATSUO, Y. 2001 Direct numerical simulation of a fully developed turbulent channel flow with respect to Reynolds number dependence. *Trans. ASME J. Fluids Eng.* **123**, 382-393.
- [4] ADRIAN, R.J., MEINHART, C.D. & TOMKINS, C.D. 2000 Organization of vortical structure in the outer region of the turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **422**, 1-51.
- [5] J. C. del Álamo & J. Jiménez: Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels, *Phys. Fluids* **15** (2003) L41-L44.
- [6] J. M. Hamilton, J. Kim, and F. Waleffe: Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures, *J. Fluid Mech.* **287** (1995) 317-248.

- [7] B. Hof et. al: Experimental Observation of Nonlinear Traveling Waves in Turbulent Pipe Flow, *Science* **305**(2004) 1594-1598.
- [8] T. Itano & S. Toh : The dynamics of bursting process in wall turbulence, *J. Phys. Soc. Jpn* **70** (2001) 703-716.
- [9] J. Jiménez : The largest scales in the turbulent wall flows, *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs* (1998) 137-154.
- [10] J. Jiménez & P. Moin: The minimal flow unit in near-wall turbulence, *J. Fluid Mech.* **225** (1991) 213-240.
- [11] G. Kawahara & S. Kida: Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst, *J. Fluid Mech.* **449**(2001) 291-300.
- [12] J. Kim, P. Moin & R. Moser : Turbulence Statistics in fully developed turbulent flow at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.* **177** (1987) 133.
- [13] S.K. Robinson: Coherent motions in the turbulent boundary layer, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23** (1991) 601.
- [14] S. Toh & T. Itano : A periodic-like solution in channel flow, *J. Fluid Mech.* **481** (2003) 67-76.
- [15] S. Toh & T. Itano : Interaction between a large-scale structure and near-wall structures in channel flow, **524** (2005) 249-262.
- [16] F. Waleffe: On a self-sustaining process in shear flows, *Phys. Fluids* **9** (1997) 883-900.
- [17] F. Waleffe: Three-Dimensional Coherent States in Plane Shear Flows, *Phys. Rev. Lett.* **81**(1998) 4140-4143.
- [18] F. Waleffe: Exact Coherent Structures in Channel Flow *J. Fluid Mech.* **435** (2001) 93-102.
- [19] F. Waleffe: Homotopy of exact coherent structures in plane shear flows, *Phys. Fluids* **15** (2003) 1517-1534.